Aritmetická postupnosť

Matej Balog

POSTUPNOSŤ je funkcia definovaná na množine prirodzených čísel N:

$$f(n) = a_n \iff \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

pričom funkčnú hodnotu a_n nazývame n-tý člen postupnosti.

Majme postupnosť reálnych čísel $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Existuje $d \in R$ také, že pre každé $n \in N$ platí $a_n + d = a_{n+1} \iff$ postupnosť je **ARITMETICKÁ** a číslo d sa nazýva **DIFERENCIA**.

Pre všetky $n, r, s \in N$ platia vzťahy

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_r = a_s + (r-s)d$$

Pre **SÚČET PRVÝCH $n \in N$ ČLENOV** aritmetickej postupnosti s_n platí

$$s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

Pre všetky $n \in N, n \geq 2$ platí

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$$

t. j. každý člen aritmetickej postupnosti okrem prvého je **ARITMETICKÝM PRIEMEROM** susedných.

MONOTÓNNOSŤ aritmetickej postupnosti je daná hodnotou diferencie d:

- $d < 0 \iff$ aritmetická postupnosť je **KLESAJÚCA**
- $d = 0 \iff$ aritmetická postupnosť je **KONŠTANTNÁ** (stacionárna)
- $d > 0 \iff$ aritmetická postupnosť je **RASTÚCA**

Dôkazy

VZŤAH MEDZI R-TÝM A S-TÝM ČLENOM

Vyjadrime r-tý a s-tý člen postupnosti pomocou prvého a_1 a diferencie d:

$$a_r = a_1 + (r-1)d$$
$$a_s = a_1 + (s-1)d$$

Odčítaním rovníc dostávame

$$a_r = a_s + (r-s)d$$

SÚČTOVÝ VZOREC

Matematickou indukciou:

$$n = 1 \ : \ s_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = a_1$$

$$IP \ : \ s_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k)$$

$$n = k+1 \ : \ s_{k+1} = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) + a_{k+1} = \frac{k(2a_1 + (k-1)d) + 2(a_1 + kd)}{2} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1})$$

Príklady z bývalých ročníkov EČ MS

V posluchárni je 1000 miest na sedenie. Tie sú usporiadané do 10 radov tak, že počty sedadiel v jednotlivých radoch tvoria aritmetickú postupnosť. V prvom rade je 46 sedadiel. Koľko sedadiel je v poslednom rade?

Určte stý člen aritmetickej postupnosti, v ktorej je prvý člen $a_1 = -7$ a diferencia $d = 3$.

V aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa $a_1 = 230$ a $a_4 = 215$. Pre ktoré n sa $a_n = 0$?

Určte diferenciu d aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v ktorej $a_1 + a_3 = 2$ a $a_2 + a_4 = 10$.

Všetky kladné nepárne čísla sme zoradili do rastúcej postupnosti 1, 3, 5, 7, ... Ktoré číslo bude v tejto postupnosti na 250-tom mieste?

Vypočítajte súčet všetkých trojciferných čísel, ktoré sú deliteľné číslom 47.

V aritmetickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ platí $a_1 + a_3 = 2$ a $a_2 + a_4 = 10$. Desiaty člen tejto postupnosti a_{10} je číslo

(A) 37 **(B)** 35 **(C)** 33 **(D)** 31 **(E)** 29